Clase 8: Teorema de Taylor

C. J. Vanegas

27 de abril de 2008

El teorema de Taylor proporciona aproximaciones de orden superior a una función y generaliza la aproximación lineal basada en la primera derivada de la función.

Se relaciona con la obtención de diferentes tipos de puntos extremos.

Existen otras aplicaciones importantes.

Recordamos o veamos por primera vez

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave (c^k). El teorema de Taylor dice que f se puede escribir como:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + R_k(a,x)$$

donde $R_k(a,x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$. Se llama el residuo.

Si $x \sim a$ $R_k(a,x)$ es pequeño de orden k, esto es, $\dfrac{R_k(a,x)}{(x-a)^k} \to 0$ cuando $x \to a$

Demostración : Por el teorema fundamental del cálculo:

$f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\, dt \Rightarrow \int_a^x f'(t)\, dt = -\int_a^x \underbrace{f'(t)}_{u}\underbrace{(-1)}_{dv}\, dt$ integrando por partes con

$$\begin{array}{c} u = f'(t) \quad dv = -1 \\ du = f''(t)dtv = x - t \end{array} \quad \text{obtenemos: } \int_a^x f'(t)\, dt = -\left[f'(t)(x-t)|_a^x - \int_a^x f''(t)(x-t)\, dt \right]$$

$$= -\left[-f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)(x-t)\, dt \right] \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\int_a^x f''(t)(x-t)\, dt}_{*}.$$

Luego integramos $(*)$ por partes nuevamente y así sucesivamente. $\square$

Si hacemos $a = x_0$ y $h = x - a$, obtenemos: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dfrac{f''(x_0}{2!}h^2 + ... + \dfrac{f^{(h)}(x_0}{h!}h^k + R_k(x_0, h)$ donde: $R_k(x_0, h) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$.
Ahora si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\overline{x}_0 \in U$ definimos:

$R_1(\overline{x}_0, \overline{x}) = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - Df(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0) + Df(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) + R_1(\overline{x}_0, \overline{x})$ y por la definición de diferenciabilidad $\dfrac{R_1(\overline{x}_0, \overline{x})}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} \to 0$ cuando $\overline{x} \to \overline{x}_0$ si escribimos $\overline{h} = \overline{x} - \overline{x}_0$ y $R_1(\overline{x}_0, \overline{x}) = R_1(\overline{x}_0, \overline{h})$ obtenemos:

La Fórmula de Taylor de 1^{er} orden

$$\boxed{f(\overline{x}_0 + \overline{h}) = f(\overline{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)h_i + R_1(\overline{x}_0, \overline{h}) \quad \text{con} \quad \frac{R_1(\overline{x}_0, \overline{x})}{\|\overline{h}\|} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \overline{h} \to \overline{0}}$$

1. Fórmula de Taylor de 2^{do} orden.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^3$, entonces: $f(\overline{x}_0 + \overline{h}) = f(\overline{x}_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)h_i h_j + R_2(\overline{x}_0, \overline{h})$ donde $\dfrac{R_2(\overline{x}_0, \overline{h})}{\|h\|^2} \to 0$ cuando $\overline{h} \to \overline{o}$

Demostración : Defina $g(t) = f(\overline{x}_0 + t\overline{h})$, $\overline{x}_0, \overline{h}$ fijos y observamos que $g \in C^3$. Aplicamos el teorema de Taylor a g con $k = 2, \quad x = 1, \quad a = 0$: $g(1) = g'(0)(1-0) + \dfrac{g''(0)}{2!}(1-0)^2 + R_2(1, 0)$ tal que$R_2(1, 0) = \displaystyle\int_0^1 g'''(t)\frac{(1-t)^2}{2!}\, dt$ por la regla de la cadena:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0 + t\overline{h})h_i;$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0 + t\overline{h})h_i h_j;$$

$$g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0 + t\overline{h})h_i h_j h_k;$$

Luego

$$\begin{aligned} g(1) &= \quad f(\overline{x}_0 + \overline{h}) \\ g(0) &= \quad f(\overline{x}_0) \\ g'(0) &= \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)h_i \\ g''(0 &= \quad \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)h_i h_j \\ g'''(0) &= \quad \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)h_i h_j h_k. \end{aligned}$$

Sustituyendo $g'''(0)$ en la integral de $R_2(\overline{x}_0, \overline{h})$

obtenemos la fórmula. $\square$

Observación 1. $|\mathrm{R}_2(\overline{x}_0,\overline{h})| \leq M\|h\|^3$ *y así* $0 \leq \dfrac{|\mathrm{R}_2(\overline{x}_0,\overline{h})|}{\|h\|^2} \leq 0$ *cuando* $\overline{h} \to \overline{0}$ *usando el teorema del encaje* $\dfrac{|\mathrm{R}_2(\overline{x}_0,\overline{h})|}{\|h\|^2} \to 0$ *cuando* $\overline{h} \to \overline{0}$

Observación 2. *La fórmula de Taylor de* 1^{er} *orden se puede deducir de manera análoga usando el teorema de Taylor. Así* $\mathrm{R}_1(\overline{x}_0,\overline{h}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0 + t\overline{h})h_i h_j\, dt.$

Recordamos el 2^{do} teorema del valor medio para integrales: Si h y g son continuas y $g \geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b h(t)g(t)\,dt = h(c)\int_a^b g(t)\,dt$, $c \in [a,b]$

Demostración : Si $g = 0$ el resultado es claro.
Si $g \neq 0$ supongamos (S.P.D.G) que $g > 0$ y as/'i $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt > 0$. Sean m y M tal que $m \leq h(t) \leq M$, $\quad m = h(t_m)$, $\quad M = h(t_M)$. Luego $m\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b h(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt$ $\Rightarrow m \leq \dfrac{\int_a^b h(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leq M$ usando el teorema del valor intermedio se sigue: $\dfrac{\int_a^b h(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} = h(c)$, con $t_m < c < t_M$. por lo tanto: $\displaystyle\int_a^b h(t)g(t)\,dt = h(c)\int_a^b g(t)\,dt$ $\square$

Usando lo anterior podemos escribir:
$R_1(\overline{x}_0,\overline{h}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0 + t\overline{h})h_i h_j \overbrace{=}^{*} \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_{ij})h_i h_j$, con c_{ij} en algún lugar de la recta l que une $\overline{x}_0$ con $\overline{x}_0 + h$

Observación 3. $(*) = \left\{ \begin{array}{c} g(t) = 1-t \\ h(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}() \end{array} \right\}$
y $l = \overline{x}_0 + t\overline{h}$ *tal que* $t = 0 \Rightarrow \overline{x}_0, \quad t = 1 \Rightarrow \overline{x}_0 + \overline{h}$

$$R_2(\overline{x}_0,\overline{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\overline{x}_0 + t\overline{h})h_i h_j h_k\,dt = \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c_{ijk})h_i h_j h_k$$

donde c_{ijk} esta en algún lugar de la recta que une $\overline{x}_0$ con $\overline{x}_0 + \overline{h}$

Ejemplo 1. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = e^{2x+3y}$. *Encuentre la Fórmula de Taylor de orden 2 en* $(x_0,y_0) = (0,0)$

Solución 1. $f(\overline{x}_0+\overline{h}) = f(\overline{x}_0) + \bigtriangledown f(\overline{x}_0)\overline{h} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}h_i h_j + \mathrm{R}_2(\overline{x}_0, xh)$ *tal que:*

$$\begin{gathered}
\overline{x}_0 = (0,0) \\
\overline{h} = (h_1, h_2) \\
f(0,0) = 1 \\
\bigtriangledown f(\overline{0}) = (2e^{2x+3y} \quad 3e^{2x+3y}) \\
\bigtriangledown f(\overline{0})\overline{h} = 2h_1 + 3h_2
\end{gathered}$$

Luego

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}h_i h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}h_i h_2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2^2\right] \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}(\overline{x}_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4e^{2x+3y} & 6e^{2x+3y} \\ 6e^{2x+3y} & 9e^{2x+3y} \end{pmatrix}(\overline{x}_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(4h_1^2 + 12h_1h_2 + 9h_2^2\right) \Rightarrow f(\overline{h}) = 1 + 2h_1 + 3h_2 +$$

$2h_1^2 + 6h_1h_2 + \dfrac{9}{2}h_2^2 + \mathrm{R}_2(\overline{0},\overline{h})$ *donde* $\dfrac{\mathrm{R}_2(\overline{0},\overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} \to 0$ *cuando* $\overline{h} \to \overline{0}$ *Es decir si queremos ver la función* $f(x,y) = e^{2x+3y}$ *alrededor del origen como un polinomio de orden* 2*, éste sería:* $p(x,y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \dfrac{9}{2}y^2 + err(x,y)$ *y* $err(x,y)$ *sería el error que se está cometiendo el cual debe ser menor que:* $\|(x,y)\| = x^2 + y^2$.